

Technische Universität Wien

Diplomarbeit

Kegelschnitte in der Taxifahrergeometrie

**ACHTUNG: Dies ist nur ein Testdokument und nicht die
korrekte Diplomarbeit.**

ausgeführt am Institut für Geometrie der
Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von Univ.Prof.Dr.G.Baron

durch

Elisabeth Schatten
Mat.Nr.: 9425256

Mai 2000

Einleitung

Auf der Suche nach einem didaktischen Thema für die Diplomarbeit bin ich auf die Vorlesung „Unterhaltungsmathematik für den Schulunterricht“ gestoßen. In dieser Vorlesung wurde uns die Taxifahrergeometrie an einfachen Beispielen vorgestellt. Da ich als Zweitfach Darstellende Geometrie studiere, hat mich dieses Thema von Beginn an sehr interessiert.

Werden eines oder mehrere Axiome der euklidischen Geometrie abgeändert, können höchst seltsame Geometrien entstehen. Diese sind genauso widerspruchsfrei, wie die Geometrie die man in der Schule kennenlernt. Von diesen nichteuklidischen Geometrien haben sich einige für die moderne Physik und Kosmologie als enorm nützlich erwiesen. Die beiden wichtigsten von ihnen, die elliptische und die hyperbolische Geometrie, lassen sich allerdings nicht so leicht veranschaulichen. Vor allem für Nichtgeometer oder -mathematiker sind diese meist nicht nachvollziehbar.

Die Taxifahrergeometrie ist eine ganz andere Art der nichteuklidischen Geometrie. Sie ist so einfach zu verstehen, daß jeder, der sie auf dem Papier mitverfolgt, sie ohne weitere Probleme nachvollziehen kann. Der Name dieser Geometrie stammt von der Distanzmessung. Denn im Gegensatz zur euklidischen Geometrie, in der man die Distanz mißt „wie ein Vogel fliegt“, wird sie in der Taxifahrergeometrie gemessen „wie ein Taxi fährt“. Die Taxifahrergeometrie ist auch unter den Namen Taxi-Geometrie, Taxicab Geometry, Manhattan-Distance oder Cityblock-Distance bekannt.

Da der mathematische Hintergrund für diese Geometrie nicht sehr aufwendig ist, könnte ich mir durchaus vorstellen, diese Geometrie in der Schule vorzustellen und einfache Beispiele mit den Schülern zu rechnen. Wenn ich an den Beginn meiner Studienzzeit zurückdenke, wäre ich dankbar gewesen, wenn ich schon vorher von der Existenz nicht-euklidischer Geometrien gehört gehabt hätte.

Kurzfassung

Ausgehend von einem normierten Vektorraum und der Erweiterung auf einen metrischen Vektorraum mit der Distanzfunktion $d_T : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ und

$$d_T = |p_x - q_x| + |p_y - q_y|$$

werden die Grundlagen der Taxifahrergeometrie erörtert.

Über die Distanz zweier Punkte kann man in der euklidischen Geometrie z.B. Kreise, Streckensymmetralen und Kegelschnitte, Ellipse und Hyperbel, definieren. Diese Definitionen werden in die Taxifahrergeometrie übertragen und führen großteils auf die im Kapitel 1 ausführlich behandelten zweibrennpunktigen T-Kegelschnitte.

Weiters wird die euklidische Definition von Kegelschnitten mittels Leitgerade und Brennpunkt in die Taxifahrergeometrie übersetzt. Hier wird erstmals die Parabel untersucht, da diese die Distanz zwischen einem Punkt und einer Geraden fordert und daher im Kapitel 1 noch nicht behandelt werden konnte. Die interessante Folgerung, daß T-Kegelschnitte unterschiedlicher Definition verschiedene Gestalten haben, wird in diesem Abschnitt dargelegt. Es existiert daher eine weitere große Gruppe an T-Kegelschnitten, die einbrennpunktigen T-Kegelschnitte.

Da euklidische Kegelschnitte ihrem Namen nach ebene Schnitte mit einem Kegel sind, wird auch diese Definition in einem eigenen Kapitel untersucht. Doch läßt sich dieser Zugang nur auf einbrennpunktige T-Kegelschnitte anwenden.

Weiters werden in dieser Arbeit die am Einheitskreis definierten Winkelfunktionen Sinus und Cosinus in der Taxifahrergeometrie untersucht. Auf die in dieser Geometrie nicht gültigen Kongruenzsätze wird eingegangen.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit werden Anwendungen der Taxifahrergeometrie in der Chemie, in der Städteplanung und im Verkehrswesen, z.B. bei der Eisenbahn, angedeutet.

Die Graphiken in dieser Arbeit wurden mit dem Zeichenprogramm Euklid erstellt. Sie sollen dem Leser zu besserem Verständnis der Materie dienen.

Inhaltsverzeichnis

1. Die Behandlung von Winkeln in der Taxifahrergeometrie	1
1.1. Taxifahrertrigonometrie	3
1.2. Ähnliche Dreiecke - Die Kongruenzsätze	7
A. Anwendungen der Taxifahrergeometrie	11
A.1. Anwendungen im städtischen Alltag	11
A.1.1. Fluggesellschaften und Taxifahrergeometrie	13
A.1.2. Die Eisenbahn und die Taxifahrergeometrie	13
B. Hermann Minkowski	15

1. Die Behandlung von Winkeln in der Taxifahrergeometrie

Der folgende Abschnitt wurde größtenteils aus [4] entnommen.

Um die T-Bogenlänge eines Winkels in beliebiger Lage zu bestimmen, ist es notwendig, beide Schenkel mit dem T-Einheitskreis zu schneiden. Die T-Bogenlänge des Winkels entspricht der T-Distanz der Punkte des T-Einheitskreises, sofern diese im gleichen Quadranten liegen. Bis jetzt fiel ein Schenkel des Winkels mit der x-Achse zusammen. Diese Lage eines Winkels nennt man Hauptlage.

Beispiel 1 *Man berechne die T-Bogenlänge α des Winkels, der von den Geraden $g : y = k_1x$ und $h : y = k_2x$ eingeschlossen wird.*

O.B.d.A. sei $k_1 > k_2$ und $0 < k_2 < \infty$, d.h.: α liegt vollständig im ersten Quadranten. Die Schnittpunkte P und Q der Geraden g und h mit dem T-Einheitskreis (im ersten Quadranten) haben die Koordinaten

$$P = \left(\frac{1}{k_1 + 1} / \frac{k_1}{k_1 + 1} \right)$$

$$Q = \left(\frac{1}{k_2 + 1} / \frac{k_2}{k_2 + 1} \right)$$

Durch die Einschränkung auf den ersten Quadranten und $k_1 > k_2 \Rightarrow p_x < q_x$ und $p_y > q_y$. Für die T-Bogenlänge s berechnet man daher die T-Distanz $d_T(P, Q)$.

$$\alpha = d_T(P, Q) = \frac{2(k_1 - k_2)}{(k_1 + 1)(k_2 + 1)}$$

Satz 1 *Die T-Bogenlänge eines euklidischen Winkels in allgemeiner Lage unterscheidet sich von der T-Bogenlänge desselben euklidischen Winkels in Hauptlage.*

Beweis: Dieser läßt sich indirekt anhand eines Beispiels führen. Der Winkel φ in allgemeiner Lage soll von den Geraden $g : y = 7x$ und $h : y = x$ eingeschlossen werden.

1. Die Behandlung von Winkeln in der Taxifahrergeometrie

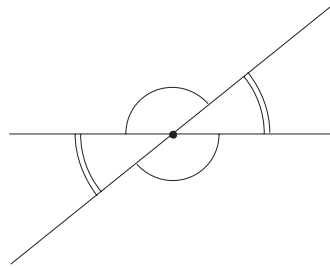


Abbildung 1.1.: Scheitelwinkel

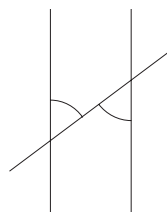


Abbildung 1.2.: Wechselwinkel

Die T-Bogenlänge α dieses Winkel kann wie oben berechnet werden $\Rightarrow \alpha = 0,75$. Der euklidische Winkel φ kann ebenfalls mittels der Anstiege ermittelt werden

$$\varphi = \arctan k_1 - \arctan k_2 \Rightarrow \varphi = 0,64rad.$$

Für die T-Bogenlänge $\bar{\alpha}$ des euklidischen Winkels φ in Hauptlage erhält man $\bar{\alpha} = 0,64 \neq \alpha$. ■

Da die T-Bogenlänge in der Taxifahrergeometrie einen Winkel festlegt, sind Winkel zwar translationsinvariant, jedoch nicht rotationsinvariant. Ferner sind Scheitelwinkel (siehe Abb. 1.1) kongruent, da der T-Eichbereich zentrisch symmetrisch ist. Auch der euklidische Satz, daß Wechselwinkel kongruent sind (siehe Abb. 1.2), gilt in der Taxifahrergeometrie. Die Spiegelung eines Winkels an einer Koordinatenachse ist, auf Grund der Symmetrie, invariant. Diese Überlegungen werden bei der Behandlung von T-Dreiecken von großer Bedeutung sein.

Satz 2 *Ein euklidisch rechter Winkel hat immer ein T-Bogenmaß von 2.*

Beweis: Sofern ein euklidischer rechter Winkel nicht in Hauptlage ist, befinden sich die Schenkel des Winkels in verschiedenen Quadranten. Daher ist es, zur Berechnung der T-Bogenlänge notwendig, eine Unterteilung in zwei euklidische Winkel α und β

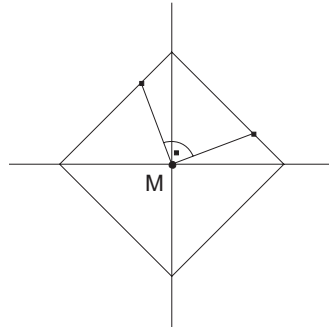


Abbildung 1.3.: Ein euklidischer rechter Winkel im T-Einheitskreis

vorzunehmen. Diese ergibt sich durch die Koordinatenachsen (siehe Abb. 1.3). α und β ergänzen einander auf 90° , sind daher Komplementärwinkel. Wird der Winkel β auf der anderen Seite von α aufgetragen, so bildet der Winkel $\alpha + \beta$ einen euklidischen rechten Winkel in Hauptlage. Dieser Winkel hat somit eine T-Bogenlänge von 2. ■

1.1. Taxifahrertrigonometrie

Wie man es von den Winkelfunktionen \sin und \cos gewohnt ist, entspricht eine Periode der Funktionen sint und cost , einem ganzen Umfang. Die T-Periode ist daher 8, d.h.:

$$\text{sint}(\varphi + 8k) = \text{sint}\varphi$$

$$\text{cost}(\varphi + 8k) = \text{cost}\varphi$$

Die graphische Darstellung der T-Winkelfunktionen verläuft vorhersehbar. Innerhalb einer Periode existieren zwei Extrema, ein Hochpunkt und ein Tiefpunkt. Diese befinden sich für den sint bei $\varphi = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}_u$. Die Extremwerte des cost sind bei $\varphi = 4k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Die Nullstellen der einen T-Winkelfunktion sind an den Extremstellen der anderen Funktion. Die Funktionen sint und cost sind daher um den Wert 2 gegeneinander verschoben (siehe Abb. 1.4).

In der Trigonometrie gibt es viele Formeln, die Beziehungen zwischen Winkeln und Winkelfunktionen herstellen und somit das Rechnen vereinfachen.

- Die einfachste, auf den pythagoräischen Lehrsatz zurückzuführende, Gleichung ist:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

Sie führt in der Taxifahrergeometrie auf die Betragsgleichung (siehe Abb. 1.5)

$$|\text{sint}\varphi| + |\text{cost}\varphi| = 1.$$

1. Die Behandlung von Winkeln in der Taxifahrergeometrie

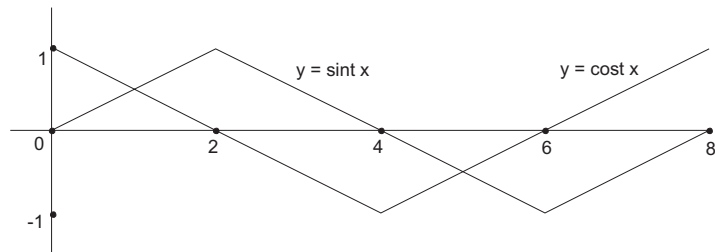


Abbildung 1.4.: Die Graphen der T-Winkelfunktionen sint und cost

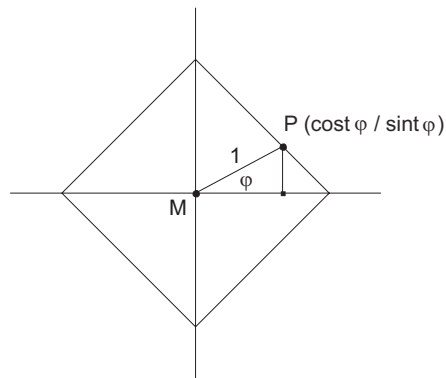


Abbildung 1.5.: Die T-Winkelfunktionen am T-Kreis

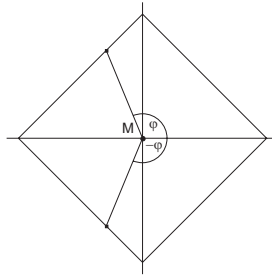


Abbildung 1.6.: Winkel mit negativem Vorzeichen

- Der in der euklidischen Geometrie gültige Satz vom negativen Winkel soll in der Taxifahrergeometrie bewiesen werden.

Satz 3 (nach [1]) Zwischen den T-Winkelfunktionen an den Stellen φ und $-\varphi$ gelten die Beziehungen:

1. $\text{cost}(-\varphi) = \text{cost}\varphi$
2. $\text{sint}(-\varphi) = -\text{sint}\varphi$

Beweis: Exemplarisch wählen wir einen Winkel φ im zweiten Quadranten $\Rightarrow -\varphi$ liegt im dritten Quadranten (siehe Abb. 1.6).

$$\begin{aligned} \text{cost}(-\varphi) &= -\frac{\cos(-\varphi)}{\sin(-\varphi) + \text{cos}(-\varphi)} = \frac{-\cos\varphi}{-\sin\varphi + \text{cos}\varphi} = \\ &= \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi - \text{cos}\varphi} = \text{cost}\varphi \\ \text{sint}(-\varphi) &= -\frac{\sin(-\varphi)}{\sin(-\varphi) + \text{cos}(-\varphi)} = \frac{-\sin\varphi}{-\sin\varphi + \text{cos}\varphi} = \\ &= \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi - \text{cos}\varphi} = \text{sint}\varphi \end{aligned}$$

■

Daher ist die sint -Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung, die cost -Funktion ist symmetrisch zur y -Achse.

- Weitere einfache Zusammenhänge zwischen Winkeln, die am Einheitskreis erkennbar sind:

$$\begin{aligned} \text{sint}(\varphi - 4) &= -\text{sint}\varphi \\ \text{cost}(\varphi - 4) &= -\text{cost}\varphi \end{aligned}$$

1. Die Behandlung von Winkeln in der Taxifahrergeometrie

$$\text{sint}(\varphi + 2) = \text{cost}\varphi$$

$$\text{cost}(\varphi - 2) = \text{sint}\varphi$$

- In den Anwendungen der Trigonometrie sind die Summensätze von großer Bedeutung. Für die Winkelfunktion cost sind diese in dem folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 4 Das Additionstheorem für die Funktion cost lautet

$$\text{cost}(\alpha + \beta) = \pm(-1 + |\text{cost}\alpha \pm \text{cost}\beta|),$$

wobei das $+$ genau dann zu wählen ist, wenn α und β auf derselben Seite der x -Achse liegen.

Beweis: o.B.d.A. gelte $\alpha, \beta \in [0, 8)$. Exemplarisch für diesen Beweis wählen wir α aus dem zweiten und β aus dem dritten Quadranten. Alle anderen Fälle verlaufen analog. Für diese Wahl der Winkel, die Winkel liegen auf verschiedenen Seiten der x -Achse, wählt man in der Formel das Minus. Ferner gilt: $6 \leq \alpha + \beta \leq 10$.

$$1 - |\text{cost}\alpha - \text{cost}\beta| = 1 - |1 - \frac{1}{2}\alpha - (-3 + \frac{1}{2}\beta)| = 1 - |4 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)|$$

1. Fall: $4 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) > 0 \Rightarrow 6 \leq \alpha + \beta < 8$

$$1 - |\text{cost}\alpha - \text{cost}\beta| = -3 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

2. Fall: $4 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) < 0 \Rightarrow 8 \leq \alpha + \beta \leq 10$

$$1 - |\text{cost}\alpha - \text{cost}\beta| = 5 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

Werden diese beiden Gleichungen addiert, so erhält man die zu beweisende Gleichung. ■

- Aus der vorherigen Formel läßt sich der Summensatz für den doppelten Winkel ableiten.

$$\text{cost}(2\alpha) = -1 + 2|\text{cost}\alpha|$$

- **Satz 5** Das Additionstheorem für die Funktion sint lautet:

1.2. Ähnliche Dreiecke - Die Kongruenzsätze

	α	β
$\text{sint}(\alpha + \beta) = -1 + \text{sint}\alpha + \text{cost}\beta $	I	III
	I	IV
	II	II
	IV	IV
$\text{sint}(\alpha + \beta) = 1 - \text{sint}\alpha - \text{cost}\beta $	I	I
	I	II
	II	III
	II	IV
	III	III
	III	IV

I, II, III bzw IV geben den Quadranten des Winkels an.

Beweis: Auch hier wollen wir nur einen Fall, $\alpha \in I$ und $\beta \in IV$, betrachten $\Rightarrow \alpha - 2$ liegt ebenfalls im vierten Quadranten. Ferner gilt: $\text{sint}\varphi = \text{cost}(\varphi - 2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{sint}(\alpha + \beta) &= \text{cost}((\alpha + \beta) - 2) = \text{cost}((\alpha - 2) + \beta) = \\ &= -1 + |\text{cost}(\alpha - 2) + \text{cost}\beta| = -1 + |\text{sint}\alpha + \text{cost}\beta| \end{aligned}$$

■

- Auch die Formel vom doppelten Winkel läßt sich für die sint-Funktion mittels der cost-Funktion herleiten:

$$\begin{aligned} \text{sint}(2\alpha) &= -1 + 2|\text{cost}(\alpha - 1)| \\ \text{sint}(2\alpha) &= \text{cost}(2\alpha - 2) = \text{cost}(2(\alpha - 1)) = -1 + 2|\text{cost}(\alpha - 1)| \end{aligned}$$

1.2. Ähnliche Dreiecke - Die Kongruenzsätze

In der euklidischen Geometrie existieren vier Kongruenzsätze: der SSS-Satz, der SWS-Satz, der WSW-Satz (oder SWW-Satz) und der SSW-Satz. Für ein Wort w aus den Buchstaben S (Satz) und W (Winkel) sagen wir, daß zwei Dreiecke ihre Bedingungen erfüllen, wenn sie in drei zusätzlichen Bestimmungstücken übereinstimmen. Zwei Dreiecke heißen kongruent, wenn sie die Bedingung SWSWSW erfüllen. Wir wollen zeigen, daß es in der Taxifahrergeometrie für die Kongruenz zweier T-Dreiecke nur eine weitere Bedingung gibt, die den SWSWS-Satz liefert. Anhand eines Beispiels kann man zeigen, daß die Kongruenzsätze der euklidischen Geometrie in der Taxifahrergeometrie nicht gelten.

Beispiel 2 Gegeben sind die T-Dreiecke mit den Ecken $A = (0/0)$, $B = (2/0)$ und $C = (2/2)$ und $A' = (0/0)$, $B' = (1/-1)$ und $C' = (2/0)$.

1. Die Behandlung von Winkeln in der Taxifahrergeometrie

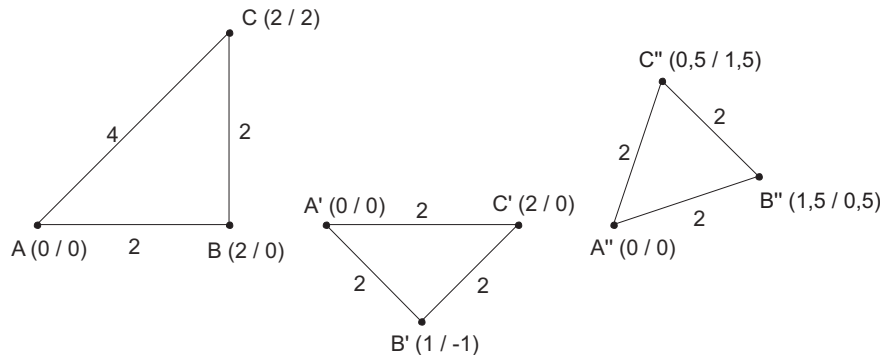


Abbildung 1.7.: Drei verschiedene Dreiecke

Das zweite T-Dreieck entsteht aus dem ersten durch T-Drehung um $\varphi = 2$ im Uhrzeigersinn, um die Ecke A (siehe Abb. 1.7).

Das erste T-Dreieck hat die Seitenlängen $a = 2$, $b = 4$ und $c = 2$ und die Winkel $\alpha = 1$, $\beta = 2$ und $\gamma = 1$. Das zweite T-Dreieck hat die Seitenlängen $a' = b' = c' = 2$. Seine Winkel stimmen mit denen des ersten T-Dreiecks überein. Diese beiden T-Dreiecke stimmen in drei Winkel und zwei Seiten überein, sind aber nicht kongruent. Daher können der SWS-Satz, der WSW-Satz und der SSW-Satz ausgeschlossen werden, sie sind in der Taxifahrergeometrie also nicht gültig. Wie in der euklidischen Geometrie können in der Taxifahrergeometrie zwei Dreiecke, die in allen Winkeln übereinstimmen, nicht als kongruent vorausgesetzt werden.

Erweitert man dieses Beispiel um ein drittes T-Dreieck (siehe Abb. 1.7), ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck, mit den Koordinaten $A'' = (0/0)$, $B'' = (1,5/0,5)$ und $C'' = (0,5/1,5)$, und den Winkeln $\alpha = 1$ und $\beta = \gamma = 1,5$, erkennt man, daß auch die SSS-Bedingung nicht auf eine Kongruenz der T-Dreiecke führt (im Vergleich mit dem zweiten T-Dreieck).

Die einzige verbleibende Möglichkeit ist der SWSWS-Satz. Dieses Beispiel widerlegt eine weitere euklidische Gegebenheit in der Taxifahrergeometrie, daß ein gleichseitiges Dreieck auch gleich große Winkel besitzt.

Satz 6 Die Winkelsumme eines T-Dreiecks beträgt immer 4.

Beweis: In dem T-Dreieck ABC wird der Winkel γ entlang der Seite b in den Eckpunkt A verschoben (siehe Abb. 1.8). Da Wechselwinkel gleich groß sind, tritt der Winkel β im Eckpunkt A nochmals auf. Die drei Winkel des Dreiecks ergänzen einander zu einer Geraden, daher beträgt die Winkelsumme 4. ■

1.2. Ähnliche Dreiecke - Die Kongruenzsätze

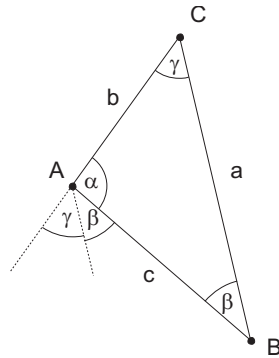


Abbildung 1.8.: Hilfsfigur für den Beweis von Satz 6

Satz 7 *Der SWSWS-Satz ist der einzige in der Taxifahrergeometrie existierende Kongruenzsatz.*

Beweis: Der SWSWS-Satz ist gültig, da die Winkelsumme in jedem T-Dreieck 4 beträgt. Die Einzigartigkeit dieses Satzes ist durch den Ausschluß der anderen Kongruenzsätze im Beispiel 2 gegeben. ■

1. *Die Behandlung von Winkeln in der Taxifahrergeometrie*

A. Anwendungen der Taxifahrergeometrie

Großes Interesse galt der Taxifahrergeometrie zu der Zeit, als der Computer in der Wissenschaft noch keine so großen Aufgaben übernehmen konnte. Eine Anwendung findet diese Distanzmessung in der Chemie, wenn es darum geht, Proben mit verschiedenen Eigenschaften zu vergleichen. Jeder Eigenschaft wird eine Dimension zugeordnet. Sollen nun Abstände zwischen zwei Objekten bestimmt werden, ist es für die Chemie nicht notwendig, daß die Distanzen sehr genau berechnet werden können. Es ist wichtiger, die Größenrelationen abzuschätzen. Hierfür ist die Taxifahrergeometrie sehr geeignet. Da für diese Abstandsbestimmung weder Quadrate, noch die Wurzel benötigt werden, wird die Rechnung, vor allem in höherdimensionalen Räumen, sehr beschleunigt. Die auf diese Art berechneten Werte sind größer, oder im Grenzfall gleich groß, wie die euklidischen Längen. Der aufgetretene Fehler ist zudem abschätzbar. Das Verhältnis, daß die Distanz der Taxifahrergeometrie im Vergleich zur euklidischen Geometrie beschreibt ist maximal \sqrt{n} .

Auf analoge Art verwendet man in der multivarianten Statistik die Taxifahrergeometrie, z.B. in der Clusteranalyse.

Weitere Anwendungen der Taxifahrergeometrie nach [5] werden auf den nächsten Seiten vorgestellt.

A.1. Anwendungen im städtischen Alltag

Die Entwicklung der Städte begann zu der Zeit, als die Menschen begannen sesshaft zu werden. Einerseits entstanden natürlich gewachsene Städte, die sich aufgrund von örtlichen Gegebenheiten, wie der Landschaft, entwickelten. Andererseits entstanden geplante Städte, die sich dadurch auszeichnen, daß sie ein wesentlich regelmäßigeres Straßennetz aufweisen. In der Renaissance hatten diese, hauptsächlich in Europa liegenden Städte, kreisförmige Zentren, um die sich die Bevölkerung ansiedelte. Geschützt wurden sie von Stadtmauern (siehe Abb. A.1). Die Zentren waren nicht nur durch ihre Lage ausgezeichnet, sondern sie wurden auch zum Mittelpunkt des städtischen Lebens. Im 19. Jahrhundert wurden in Amerika zunehmend Städte mit gitterförmigem Straßennetz modern. Ein bekanntes Beispiel für diese Städteform ist Manhataen, in New York. Dieser Trend ging soweit, daß alte Städte nach den neuen

A. Anwendungen der Taxifahrergeometrie

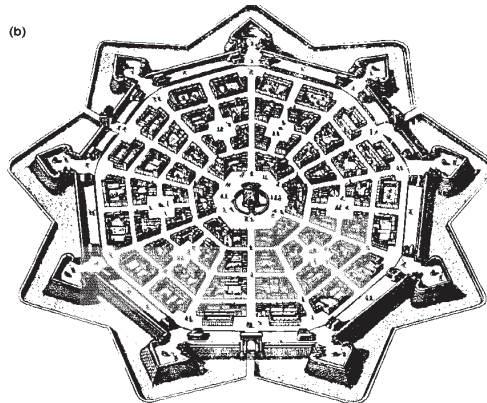


Abbildung A.1.: Kreisförmige Stadt in der Renaissance

Richtlinien umgebaut wurden. Da viele heutige Städte durch zusammenwachsen mehrerer kleinerer Städte entstanden, sind in ihnen meistens viele verschiedene Baustile wiederzufinden. Das Alter vieler Städte oder Stadtteile kann mit Hilfe des Straßennetzes bestimmt werden. So sind zum Beispiel freizügigere, größere Häuserblöcke ein Zeichen für eine jüngere Stadt, da durch weniger Kreuzungen der Verkehr reduziert und gleichzeitig beschleunigt wird.

Eine Stadt besitzt eine große Vielfalt an architektonisch unterschiedlichen Gebäuden. Vor den 60er Jahren lag der Schwerpunkt bei der Planung einer Stadt in der Schönheit der Architektur, das Ambiente war von großer Bedeutung. Seit den 60er Jahren ist die Effizienz, z.B. im Verkehr, ein Hauptpunkt, der bei der Planung berücksichtigt wird. Soll in einer Stadt ein neues Einkaufszentrum errichtet werden, so muß der Standort bestimmt werden. Hier kann eine Überlegung sein, daß es mehrere große Wohnbezirke in einer Gegend gibt, die aber alle potentielle Kunden des neuen Einkaufszentrums sind. Daher kann man den optimalen Standort mit Hilfe der Taxifahrergeometrie derart bestimmen, so daß z.B. die T-Distanz der einzelnen Wohngegenden zum Einkaufszentrum eine bestimmte Größe nicht überschreitet.

Die Distanz ist nicht der einzige Faktor, der, auf der Suche nach dem schnellsten Weg zwischen zwei Orten, von Bedeutung ist. Eine große Auswirkung haben auch Verkehr, Geschwindigkeitsbegrenzungen, Ampeln und vieles mehr. Beim öffentlichen Verkehr sind die Kosten und andere wirtschaftliche Fragen von großer Bedeutung. Wie man diese Situationen mit einbeziehen kann, wollen wir nun überlegen.

A.1.1. Fluggesellschaften und Taxifahrergeometrie

Betrachtet man eine Landkarte, und markiert auf ihr die Flughäfen, so erhält man ein Netz von Punkten. Diese können als Punkte der Taxifahrergeometrie interpretiert werden. Die euklidischen Verbindungsgeraden entsprechen den idealen Flugrouten. Für Flugzeuge ist es allerdings nicht möglich, auf diesen direkten Wegen zu ihren Zielen zu gelangen. Früher wurden die Flugstrecken auf Grund von Luftverkehr und Wetterverhältnissen berechnet. Heutzutage ist die Flugroutengestaltung wesentlich flexibler und wird unter dem Begriff „Air Traffic Management“ gehandhabt. Die Berechnung der Flugstrecken beinhaltet zusätzlich Windrichtung und Windgeschwindigkeit. Dadurch wird nicht nur der zurückzulegende Weg und die Zeit minimiert, sondern auch Treibstoffverbrauch und damit finanzielle Ausgaben. Die Fluggesellschaft Delta Airlines hat ein Computerprogramm entwickelt, daß auf Grund dieser Umstände die ökonomischste Flugroute berechnet. Durch dieses Programm spart Delta Airlines bis zu 16,8 Millionen Dollar im Jahr.

Breitenkreise sind zueinander parallel. Sie werden in Grad angegeben, wobei der Äquator mit 0° und die Pole mit 90° nördliche bzw. südliche Breite bezeichnet werden. Meridiankreise laufen durch die Pole und werden mit von 0° bis 180° östliche bzw. westliche Länge bezeichnet. Zusätzlich ermöglichen Minuten, Sekunden und Zehntelsekunden eine feinere Unterteilung. Ein Grad entspricht 60 Seemeilen, einer Minute entspricht eine Seemeile. Es ist somit möglich jeden Punkt der Erde bis auf etwa 3 Meter genau anzugeben.

Da nun das Netz über die Landkarten wesentlich feiner gegliedert ist, kann die Flugbahn mittels Computer wesentlich ökonomischer gestaltet werden. So kann es für einen Flug von Vorteil sein, wenn ein Flugzeug, um die Vorteile des Windes auszunützen, eine indirekte Flugroute wählt.

A.1.2. Die Eisenbahn und die Taxifahrergeometrie

Anders als im Flugverkehr soll die Eisenbahn die kürzeste Verbindung zweier Orte fahren können. Dafür werden Schienen in Abhängigkeit von wirtschaftlich wichtigen Zentren, wie Industrie oder Landwirtschaft, quer durchs Land gelegt. Wenn man von geographischen Hindernissen absieht, verlaufen diese relativ geradlinig. Auch hier wird versucht, die Kosten minimal zu halten. Bahnhöfe und Kreuzungen zeichnen die Punkte der Taxifahrergeometrie aus.

Wir wollen nun an Hand der Orte East Lansing in Michigan und Toronto in Ontario die T-Distanz bestimmen. Diese wird mit Hilfe des Schienenverlaufs festgelegt und beträgt 473 km. Aus dem Fahrplan ist zu entnehmen, daß diese Strecke mit dem Zug in etwa 9 Stunden zurückgelegt wird. Für dieselbe Strecke mit dem Auto muß man 542 km fahren. Bei durchschnittlich 100 km/h benötigt man ungefähr $5\frac{1}{2}$ Stunden.

A. Anwendungen der Taxifahrergeometrie

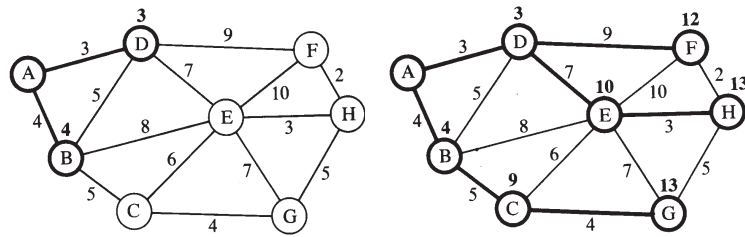


Abbildung A.2.: Algorithmus zur Bestimmung der T-Distanz

Wir wollen nun eine neue Variable, die T-Zeit, berücksichtigen. In der heutigen Leistungsgesellschaft müssen viele Personen mit ihrer Zeit ökonomisch haushalten. Sie werden abschätzen, ob es bei dieser Reise günstiger ist mit dem Auto oder mit dem Zug zu fahren. Der Zug hat den Nachteil der längeren Reise, aber den Vorteil, daß die Fahrt streßfreier ist, und zu anderen Zwecken genützt werden kann. Bei dieser relativ kurzen Strecke wird die Wahl wahrscheinlich bei den meisten auf das Auto fallen. Für längere Strecken ist die T-Zeit der Bahn kürzer als die Autofahrt.

Trotzdem ist die T-Zeit nicht immer der entscheidende Faktor. Sind Transportgüter geladen, ist es oft wichtiger, die T-Distanz und die Kosten zu minimieren. Kommen nun mehrere dieser Faktoren gleichzeitig ins Spiel, so hat man ein mehrdimensionales Problem. Der Lösungsweg unterscheidet sich aber nicht von dem folgenden zweidimensionalen, bei dem es um die Auffindung des kürzesten Weges vom Punkt A zum Punkt H geht.

Man sucht nun den von A aus am nächst gelegenen Punkt. Dies ist D , denn er ist nur drei Einheiten entfernt. Auf unserem Plan verbinden wir nun A mit D , und schreiben die Entfernung von A über D . Dann sucht man den zweitnächsten Punkt von A . Dieser ist B . Wieder verbindet man die Punkte und notiert die Distanz über dem Punkt B . So sucht man nacheinander alle weiteren Distanzen zu den einzelnen Punkten auf (siehe Abb. A.2). Die nächste wäre C über B mit einer Länge von neun. Schließlich gelangt man mit 13 Einheiten über die Punkte D und E nach H . Mit diesem Algorithmus kann man die gewünschte Variable, Zeit, Distanz oder Kosten, aufsuchen. Der dadurch entstandene Weg entspricht einem Pfad in der Taxifahrergeometrie.

Bei der Eisenbahn könnten die Punkte Bahnhöfe und Kreuzungen sein, die Einheiten könnten dann Kilometer, Kosten oder Energieverbrauch bedeuten.

B. Hermann Minkowski

Dieser Abschnitt ist hauptsächlich aus [3] entnommen.

In den 90er Jahren des 19. Jahrhunderts beschäftigte sich der Mathematiker *Hermann Minkowski* mit dem Begriff *konvexer Körper*. Seiner Definition nach hat ein konvexer Körper die Eigenschaft, daß sich jede geradlinige Verbindung zweier Punkte aus dem Inneren des Körpers zur Gänze im Inneren befindet (siehe Abb. B.1).

Weiters erkannte Minkowski den Zusammenhang zwischen dem Begriff des konvexen Körpers und dem fundamentalen Satz von Euklid (siehe Seite ??), der besagt, daß im Dreieck die Summe zweier Seiten stets größer ist, als die dritte Seite, die *Dreiecksungleichung*. Dieser Satz folgt bei Euklid aus dem Axiom von der Kongruenz zweier Dreiecke. Läßt man nun alle Axiome der gewöhnlichen euklidischen Geometrie bestehen, mit Ausnahme des Axioms von der Dreieckskongruenz, indem man dieses durch das weniger aussagende Axiom der Dreiecksungleichung ersetzt, so gelangt man zu der von Minkowski aufgestellten *Minkowskischen Geometrie*. Diese läßt sich im wesentlichen durch folgenden Feststellungen charakterisieren:

1. Zwei Strecken heißen dann einander gleich, wenn man sie durch Parallelverschiebung des Raumes ineinander überführen kann.
2. Die Punkte, die von einem festen Punkt O gleichen Abstand haben, werden durch eine gewisse konvexe geschlossene Fläche des gewöhnlichen euklidischen Raumes mit O als Mittelpunkt repräsentiert, so daß an Stelle der konzentrischen Kugeln der gewöhnlichen euklidischen Geometrie ein System ineinandergeschachtelter, durch Ähnlichkeitstransformation erzeugter konvexer Flächen tritt.

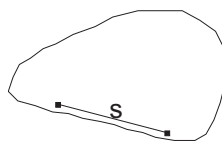


Abbildung B.1.: Eine konvexe Menge

B. Hermann Minkowski

Insofern in der Minkowskischen Geometrie das Parallelenaxiom gilt, ist diese Geometrie eine der gewöhnlichen euklidischen Geometrie am nahestehendsten Geometrie, ebenso wie die *Bolyai-Lobatschewskysche Geometrie*, zu der sie ein Gegenstück bildet. Von großer Bedeutung ist die Minkowskische Geometrie vor allem in der Zahlentheorie. Die dieser Geometrie zugrundeliegende konvexe Fläche heißt *Eichfläche* oder *Eichbereich*.

Hermann Minkowski wurde am 22. Juni 1864 in Alexoten in Rußland als Sohn von Lewin und Rahel Minkowski geboren. Noch während seiner Kinderjahre wanderte die Familie nach Deutschland aus, so daß Hermann im Oktober 1872 in die Septima des Altstädtischen Gymnasiums zu Königsberg in Preußen eintrat. Da er ein sehr guter Schüler war, konnte er mehrere Klassen in kürzerer als der vorgeschriebenen Zeit absolvieren, und er verließ bereits im März 1880 mit dem Zeugnis der Reife das Gymnasium. Sein Universitätsstudium absolvierte er fünf Semester in Königsberg und drei Semester in Berlin.

Bereits im ersten Semester erhielt Minkowski eine Geldprämie, die für die Lösung einer mathematischen Aufgabe durch Studenten ausgesetzt war, doch verzichtete er zugunsten eines ärmeren Mitschülers auf diese Prämie.

1882 beteiligte sich der junge Student an einer mathematischen Preisaufgabe, bei der es sich um die Zerlegung der ganzen Zahlen in fünf Quadrate handelte. Obwohl Minkowski die Arbeit gegen die Bedingungen in deutscher Sprache einreichte, überzeugte er die Kommission und sie überreichte ihm im April 1883 den *Grand Prix des Sciences Mathématique*.

Nun begann für Minkowski eine arbeitsreiche und publikationsreiche Zeit. In den folgenden Jahren beschäftigte er sich mit dem Studium der *Theorie der quadratischen Formen* und mit damit im Zusammenhang stehenden Fragestellungen. Die Ergebnisse dieser Arbeiten bildeten den wesentlichen Inhalt seiner Dissertation, die 1885 von der philosophischen Fakultät in Königsberg anerkannt wurde. Bei der öffentlichen Promotion übernahm Minkowskis langjähriger Freund *David Hilbert* die Aufgabe des Kontrahenten, jedoch waren die Ausführungen des Dissertanten für alle überzeugend. Später erbrachte Hilbert den Beweis für die von Minkowski aufgestellte These: „Es ist nicht wahrscheinlich, daß eine jede positive Form sich als eine Summe von Formquadraten darstellen läßt.“

Die Forderung von *Leopold Kronecker*, eine schärfere Fassung des arithmetischen Begriffs der Äquivalenz von Formen, führte Minkowski zu der Frage nach dem Verhalten linearer ganzzahliger Substitutionen von beliebiger Variablenzahl im Sinne der Kongruenz nach einem beliebigen Modul. Diese Resultate waren ein Teil seiner

Habilitationsschrift, die er an der philosophischen Fakultät in Bonn einreichte, worauf er im April 1887 die *Venia legendi* für Mathematik erhielt.

Minkowskis intensive Bearbeitung der Quadratischen Formen und deren Verallgemeinerung führten ihn dazu, das Werk *Geometrie der Zahlen* zu verfassen, welches 1896 in seiner ersten Ausführung erschien. Er entwickelte Beweise über zahlentheoretische Sätze ohne rechnerische Hilfsmittel, einzig und allein aufbauend auf einer geometrisch anschaulichen Betrachtung. Die Endfassung dieses Werkes konnte Minkowski allerdings nicht mehr fertigstellen.

Weitere Themenkreise mit denen sich Minkowski beschäftigt hat sind:

- Die geometrische Veranschaulichung der gewöhnlichen Kettenbrüche
- Die periodische Approximation algebraischer Zahlen
- Begriffe des gemischten Volumens
- Die partiellen Differentialgleichungen von Monge-Ampèreschen Typ
- Die Mengentheorie

Weiters hat er sich mit Themen der Physik beschäftigt. Er stellte Untersuchungen zur

- Hydrodynamik
- Kapillarität
- Elektrodynamik
- Relativitätstheorie
- Mechanik

an.

Im August 1892 wurde Minkowski zum außerordentlichen Professor an der philosophischen Fakultät zu Bonn ernannt. 1894 wurde er auf Wunsch seines Freundes David Hilbert nach Königsberg versetzt. Im Oktober 1896 ging er als Professor für Mathematik nach Zürich, wo er bis 1902 blieb. 1897 heiratete er Auguste Adler und wurde bald darauf zum ersten Mal Vater. Insgesamt hatte er vier Söhne und eine Tochter, um die er sich sehr liebevoll kümmerte. Am 7. Juli 1902 erfolgte die Ernennung zum ordentlichen Professor in Göttingen. Auf der Höhe seines Wirkens starb Minkowski am 12. Jänner 1909 an einer Blinddarmenzündung.

Von David Hilbert stammen die folgenden berührenden Worte aus [3]:

B. Hermann Minkowski

Er war mir ein Geschenk des Himmels, wie es nur selten jemand zuteil wird, und ich muß dankbar sein, daß ich es so lange besaß. Jeder, der ihm näher stand, empfand die Harmonie seiner Persönlichkeit und den Zauber seiner Genialität; sein Wesen war wie der Klang einer Glocke, so hell in dem Glück bei der Arbeit und der Heiterkeit seines Gemütes, so voll in der Beständigkeit und Zuverlässigkeit, so rein in seinem idealen Streben und seiner Lebensauffassung.

Wie er gelebt hat, so starb er - als Philosoph.

Literaturverzeichnis

- [1] BRISBIN, RUTH und PAUL ARTOLA: *Taxicab Trigonometry*. Pi My Epsilon Journal, 8:89–95,, 1985.
- [2] GARDNER, MARTIN: *Geometrie mit Taxis, die Kopfe der Hydra und andere mathematische Spielereien*. Birkhäuser, 1997.
- [3] HILBERT, DAVID: *Gedenkband*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
- [4] THOMPSON, ANTHONY C.: *Minkowski Geometry*. Cambridge University Press, 1996.
- [5] *Taxicab Geometry and City Planning*. <http://www2.gvsu.edu/petersm/taxi.html>.

Literaturverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1.1. Scheitelwinkel	2
1.2. Wechselwinkel	2
1.3. Ein euklidischer rechter Winkel im T-Einheitskreis	3
1.4. Die Graphen der T-Winkelfunktionen \sin und \cos	4
1.5. Die T-Winkelfunktionen am T-Kreis	4
1.6. Winkel mit negativem Vorzeichen	5
1.7. Drei verschiedene Dreiecke	8
1.8. Hilfsfigur für den Beweis von Satz 6	9
A.1. Kreisförmige Stadt in der Renaissance	12
A.2. Algorithmus zur Bestimmung der T-Distanz	14
B.1. Eine konvexe Menge	15

Index

- Air Traffic Management, 13
- Breitenkreis, 13
- Chemie, 11
- Clusteranalyse, 11
- Dreiecksungleichung, 15
- Eichbereich, 2, 16
- Eisenbahn, 13
- Fluggesellschaft, 13
- Flugroute, 13
- höherdimensionale Räume, 11
- Hilbert David, 16
- Kongruenz zweier Dreiecke, 15
- Kongruenzsätze, 7
 - SSS-Satz, 7
 - SWS-Satz, 7
 - SWSWS-Satz, 7
 - WSW-Satz, 7
- konvexer Körper, 15
- Kronecker, Leopold, 16
- Meridiankreis, 13
- Minkowski Hermann, 15
- Minkowskische Geometrie, 15
- multivariate Statistik, 11
- städtische Alltag, 11
- Stadt
 - geplant, 11
 - gitterförmig, 11
 - kreisförmig, 11
 - natürlich gewachsen, 11
- Summensätze, 6
- T-Bogenlänge, 1
- T-Distanz, 1, 11, 12, 14
- T-Einheitskreis, 1, 3
- T-Periode, 3
- T-Polygone
 - T-Dreieck, 7
- T-Winkelfunktionen, 3
 - cost, 3
 - sint, 3
- T-Zeit, 14
- Taxifahrertrigonometrie, 3
- Winkel, 1